Ebene algebraische Kurven

Vorlesung Nr.13 / 25.5.2016

von Maximilian Dietrich
SS16 - Prof. Dr. Duco van Straten

Satz 3.12 *:*
Sei $A \in Mat(N \times N, \mathbb{C}[[X]])$ *und* $det(A) \in \mathbb{C}[[X]]$ *eine Potenzreihe, d.h.* $A \in \mathbb{C}[[X]]^N \to \mathbb{C}[[X]]^N$.
Dann gilt unter der Annahme, dass $det(A) \neq 0$*:*

$$dim(Coker(A)) = dim(Coker(det(A)))$$

Beweis
Sei $\alpha(X) \in \mathbb{C}[[X]]$
Diese Potenzreihe α *kann man immer schreiben als:*

$$\alpha(X) = X^a u(X)$$

wobei $u(X)$ *eine Einheit (d.h:* $u(0) = 0$*) ist und* a *die Ordnung von* $\alpha(x)$ *darstellt.*
Definiere nun eine Abbildung 'Multiplikation mit α*':*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[X]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X]] \\ h &\mapsto \alpha h \qquad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da $\mathbb{C}[[X]]$ *ein nullteilerfreier Ring ist.*
Nun betrachten wir:

$$Coker(\alpha\cdot) = {}^{\mathbb{C}[[X]]}\!/_{Im(\alpha\cdot)} = {}^{\mathbb{C}[[X]]}\!/_{\langle\alpha\rangle} = {}^{\mathbb{C}[[X]]}\!/_{\langle X^a\rangle}$$

Hieraus folgt direkt, dass

$$dim(Coker(\alpha\cdot)) = a$$

weil $\mathbb{C}1 \bigoplus \mathbb{C}X \bigoplus ..... \bigoplus \mathbb{C}X^{a-1}$ *eine Basis ist.*
Hieraus erkennen wir, dass die Ordnung von $\alpha(X)$*ist auch die Dimension des Cokerns von* $(\alpha\cdot)$ *ist.*

Sei nun A *eine Matrix* $A \in Mat(N, N, \mathbb{C}[[X]])$. *Diese kann man als Abbildung von Reihen auffassen:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[X]]^N &\xrightarrow{A\cdot} \mathbb{C}[[X]]^N \\ \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_N \end{pmatrix} &\mapsto A \begin{pmatrix} k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun stellen wir uns die Frage, was $Coker(A\cdot) = {}^{\mathbb{C}[[X]]^N}/_{Im(A)}$ *ist:*
Im Fall $N = 1$ *wissen wir bereits, dass* $Coker(A\cdot) = ord(\alpha)$
Zunächst erinnern wir uns an die aus der linearen Algebra bekannten Struktursätze, wie zum Beispiel:

- *Satz über die Jordan-Normalform*
- *endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring*
- *Satz über Elementarteiler (Elementarteilersatz)*
- *Gauß-Elimination*

Mit deren Hilfe, versuchen wir A *durch Zeilen- und Spaltenoperationen in eine möglichst einfache Form zu bringen.*
Betrachte hierfür folgendes Funktionendiagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[[X]]^N \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}[[X]]^N \arrow[d, "C"] \\ \mathbb{C}[[X]]^N \arrow[u, "B"] \arrow[r, "A'"] & \mathbb{C}[[X]]^N \end{tikzcd}$$

wobei B, C *invertierbare Matrizen aus* $GL_n(\mathbb{C}[[X]])$. *Dann gilt:*

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists B, C \text{ s.d. } A' = CAB$$

Wenn $A \sim A'$ *gilt also auch*

$$Coker(A) \simeq Coker(A')$$

Also sind bei ähnlichen Matrizen die Cokerne Isomorph.

Wähle im nächsten Schritt spezielle Matrizen für B *und* C*:*
Mögliche Matrizen sind:
Permutationsmatrizen oder Elementarmatrizen der Form

- AB*: 'Addiere* α *mal die Spalte* i *zu Spalte* j*' (Spaltenoperation)*
- CA*: 'Addiere* α *mal die Zeile* j *zu Zeile* i*' (Zeilenoperation)*

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & j & \\ & & & & \downarrow & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & & . & & \alpha & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Seien nun B und C Produkte solcher Matrizen.
Damit haben sie als Determinante ± 1 und sind somit immer invertierbar.
Mit Hilfe dieser Operationen vereinfachen wir nun A mit Koeffizienten a_{ij}, indem wir: Als erstes das Element (a_{ij}), welches minimale Ordnung hat an die Position $(1,1)$ der Matrix befördern.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bigcirc & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bigcirc & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Hiermit gilt, dass alle Koeffizienten $*$ eine höhere Ordnung als das Minimale haben, also sind in $C[[X]]$ alle $*$ durch $\bigcirc$ teilbar. Dadurch erhält man mit Zeilen- und Spaltenoperationen folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & * & * & * & * & * \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Nun wiederholen wir diesen Vorgang mit:

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \circledast & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \circledast & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

u.s.w. Als Ergebnis folgt eine Diagonalmatrix der Form:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Also kommen wir zu dem Ergebnis:

$$A \sim A^{'} = Diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

wobei $\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3...|\alpha_n$*. Diese Diagonalelemente sind also Elementarteiler der Matrix A.*
Hieraus folgt nun:

$$Coker(A\cdot) \simeq Coker(A^{'}\cdot) = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}[[X]]/(\alpha_i) = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{N}}_{direkte\ Summe} \underbrace{\mathbb{C}[[X]]/(X^{a_i})}_{zyklischhe\ Moduln}$$

da $\alpha_i = X^{a_i} \underbrace{u_i(X)}_{Einheit}$

Also ist:

$$dim(Coker(A\cdot)) = a_1 + ... + a_N = ord(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) = dim(Coker(det(A\cdot))) = ord(det(A))$$

(Gauß-Elimination mit Potenzreihen $\rightarrow$ *K-Theorie)* □

Anwendung

Sei $N = d + e$ mit der Abbildung $\mathbb{C}[X]^N \xrightarrow{S^T_{fg}} \mathbb{C}[X]^N$, wo $deg(f) = d$ und $deg(g) = e$, d.h. $f = Y^d + ... g = Y^e + ...$
Hieraus folgt nun, dass $Coker(S^T_{gf}) \simeq \mathbb{C}[[X]]/(f,g)$.
Sei nun $0 \in C \cap D$,wobei $C := \mathcal{V}(f)$, $D := \mathcal{V}(g)$ und $\hat{S}^T_{fg}$ definiert durch:

$$\mathbb{C}[[X]]^N \xrightarrow{\hat{S}^T_{fg}} \mathbb{C}[[X]]^N$$

dann gilt:

$$Coker(\hat{S}^T_{fg}) \simeq \mathbb{C}[[X,Y]]/(f,g)$$

$$\Rightarrow dim(\mathbb{C}[[X,Y]]/(f,g)) = dim(Coker(\hat{S})) = Ord(det(\hat{S})) = Ord(Res_{f,g})$$

3.13 Lokale Parametrisierung und die δ-Invariante

Wir wissen bereits, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass:

$$f(t^N, y) = \prod (y - b_i(t))$$

wobei wir hier nicht auf alle benötigten Voraussetzungen eingehen.
Definiere nun die (formalen) lokalen Zweige der Kurve durch $f = f_1, f_2, ..., f_r$
Wenn wir nun annehmen, dass $r = 1$ gilt, f also nur einen Zweig bei 0 hat, dann finden wir die, LOKALE PARAMETRISIERUNG VON $f(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^N \\ y(t) &= b(t) \end{aligned}$$

wobei man zeigen kann, dass dieses $b(t)$ konvergiert.
Wenn wir nun $f(x, y)$ als $f(t^N, y)$ darstellen so folgt:

$$f(t^N, y) = \prod_{i=0}^{N-1} (y - b(\xi_i t))$$

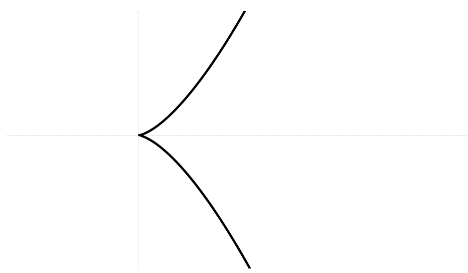
wobei ξ_i die i-te Einheitswurzel darstellt.
Hiermit gilt nun

$$f(x(t), y(t)) = f(t^N, b(t)) = \prod (b(t) - b(\xi_i t) = 0$$

Beispiel

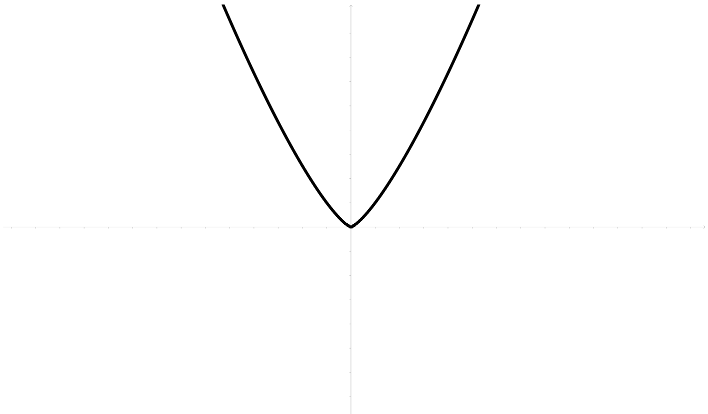
1.

$$\begin{aligned} y^2 - x^3 &= f(x, y) \\ x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3 \end{aligned}$$



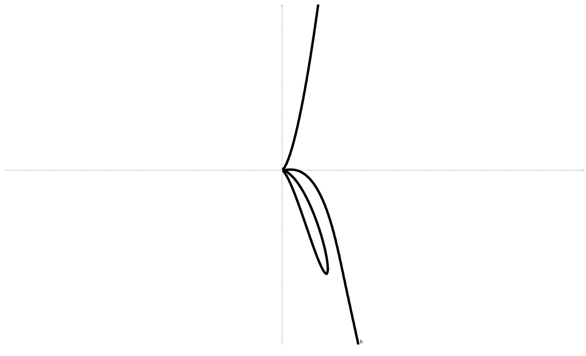
2.

$$y^3 - x^4 = f(x, y)$$
$$x(t) = t^3$$
$$y(t) = t^4$$



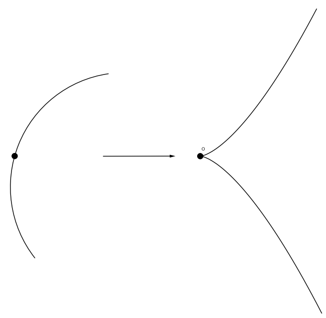
3.

$$x(t) = t^4$$
$$y(t) = t^6 + t^7$$
$$\Rightarrow f(x, y) = (y^2 + x^3)^2 - 4x^3y^2 - 4x^5y - x^7$$



Man kann $x(t), y(t)$ auch Auffassen als Abbildung:

$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$



kleine Umgebung um (0,0) $\longrightarrow$ singulärer Kurvenzweig

Um eine kleine Umgebung um den Ursprung entsteht also ein singulärer Kurvenzweig.

Nun machen wir einen algebraischen Vergleich.
Hierzu betrachten wir die folgende Abbildung n:

$$\mathbb{C}[[X, Y]] \xrightarrow{\quad n \quad} \mathbb{C}[[t]]$$

Diese Abbildung ist ein Ringhomomorphismus mit:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x(t) \\ y &\mapsto y(t) \\ &\vdots \\ &u.s.w. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \qquad \text{„ Normalisierung “} \\ x &\mapsto x(t) \\ x^2 &\mapsto (x(t))^2 \end{aligned}$$

Das heißt also: $f(x, y) \to f(x(t), y(t)) = 0$
Also folgt abschließend: $\mathbb{C}[[X,Y]]/(f) \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]]$

Definition (δ-Invariante)
Die δ-Invariante von einer Funktion f ist:

$$dim_{\mathbb{C}} Coker(n) := \delta(f)$$

und bezeichnet die „virtuelle Anzahl von Doppelpunkten “

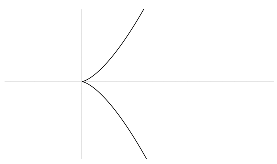
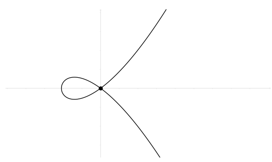
Beispiel (Monomdiagramm $i \to t^i$)

1.

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = t^3$$
$$f(X, Y) = Y^2 + X^3$$

t^0	t^1	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8	t^9
$X^0 = 1$		X	Y	X^2	XY	Y^2	X^2Y	X^4	X^3Y

$$\Rightarrow Coker(n) = \mathbb{C} \cdot t \Rightarrow dim(Coker(n)) = 1 \Rightarrow \delta(Y^2 - X^3) = 1$$

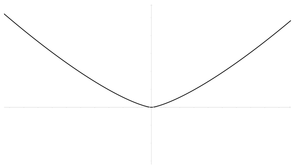



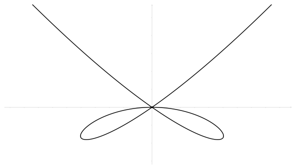
2.

$$x(t) = t^3$$
$$y(t) = t^4$$
$$f(X, Y) = Y^3 + X^4$$

t^0	t^1	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8	t^9
$X^0 = 1$			X	Y		X^2	XY	Y^2	X^3

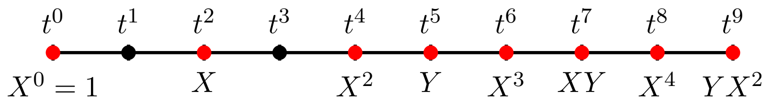
$$\Rightarrow Coker(n) = \mathbb{C}{\cdot}t \bigoplus \mathbb{C}{\cdot}t^2 \bigoplus \mathbb{C}{\cdot}t^5 \Rightarrow dim(Coker(n)) = 3 \Rightarrow \delta(Y^3 - X^4) = 3$$



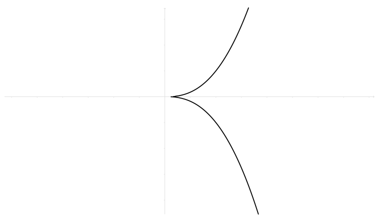


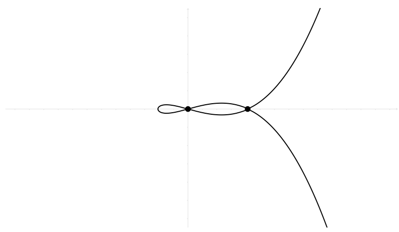
3.

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = t^5$$
$$f(X,Y) = Y^2 \pm X^5$$



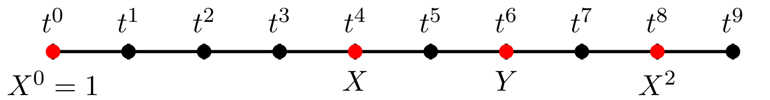
$$\Rightarrow Coker(n) = \mathbb{C} \cdot t \bigoplus \mathbb{C} \cdot t^3 \Rightarrow dim(Coker(n)) = 2 \Rightarrow \delta(Y^2 \pm X^5) = 2$$





4.

$$x(t) = t^4$$
$$y(t) = t^6$$
$$Y^2 = X^3$$

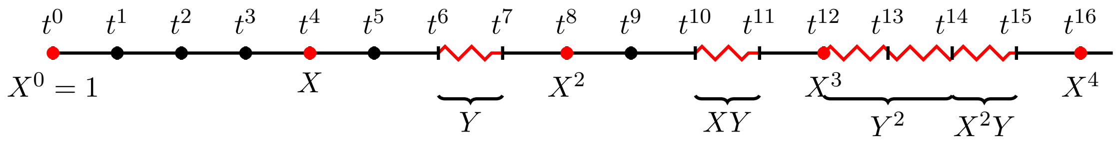


Nach Satz gilt, dass δ endlich ist. In diesem Fall ist δ jedoch nicht endlich, was uns zu dem Schluss führt, dass hier eine falsche Parametrisierung gewählt wurde.

5.

$$x(t) = t^4$$
$$y(t) = t^6 + t^7$$

Diese Parametrisierung erhalten wir mittels des Verfahrens von Newton



$\Rightarrow Coker(n) = \mathbb{C}{\cdot}t \bigoplus \mathbb{C}{\cdot}t^2 \bigoplus \mathbb{C}{\cdot}t^5 \Rightarrow dim(Coker(n)) = 3 \Rightarrow \delta(Y^3 - X^4) = 3$

3.14 Lokale Parametrisierung & Schnittmultiplizität

Satz
Sei $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^2$ *eine lokale Parametrisierung von* f.
Sei ferner $C := \mathcal{V}(f)$, $D := \mathcal{V}(g)$ *und* $0 \in C \cap D$

$$\text{Dann gilt: } T(C, D; 0) = Ord_t(x(t), y(t))$$

Beweis
Setze $\hat{R} := {}^{C[[X,Y]]}/_{(f)}$ *und* $\tilde{R} := \mathbb{C}[t]$

$$\hat{R} \xrightarrow{\quad n \quad} \tilde{R}$$
$$x \longmapsto x(t)$$
$$y \longmapsto y(t)$$

und betrachte nun das folgende Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\underset{=0}{ker} \arrow[r] \arrow[d] & \underset{=0}{ker} \arrow[r] \arrow[d] & \underset{=A}{ker} \arrow[d] \arrow[ddd, rounded corners, to path={-- ([xshift=20ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-4ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-40ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\partial"] & \\
\hat{R} \arrow[r, hook, "inj."] \arrow[d, hook, "g"] & \tilde{R} \arrow[r, two heads, "surj."] \arrow[d, hook, "g"] & {}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}} \arrow[d, hook, "g"] \\
\hat{R} \circ g \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{R} \arrow[r, two heads, "surj."] \arrow[d] & {}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}} \arrow[d] \\
\underset{={}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(fg)}}{coker} \arrow[r] & coker \arrow[r] & \underset{=B}{coker}
\end{tikzcd}
$$

Hieraus ergibt sich die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow {}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(fg)} \longrightarrow {}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(g)} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Wodurch aus $(A = B)$ *nun* ${}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(fg)} = {}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(g)}$ *folgt.*
Nun ist:

$$A = ker({}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}} \xrightarrow{g\cdot} {}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}})(\leftarrow dim(\delta))$$
$$B = coker({}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}} \xrightarrow{g\cdot} {}^{\tilde{R}}/_{\hat{R}})$$

Dies führt auf die weitere exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{C}^{\delta} \longrightarrow \mathbb{C}^{\delta} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Was uns zu dem Schluss führt, dass:

$$dim(A) = dim(B) \quad (\mathit{Rangsatz})$$

$$\Rightarrow dim(A) = dim(B) \Rightarrow dim({}^{\mathbb{C}[[X,Y]]}/_{(fg)}) = dim({}^{\mathbb{C}}/_{(g)})$$

Hiermit kommen wir zu dem gewünschten Ergebnis:

$$I(C, D; 0) = Ord_t(g(x(t)), y(t))$$

$\square$